

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

Задание 1. Вариант 1. Из 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Он состоит из 10 красных и 17 синих кубиков.

Какая наименьшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 12.

Какая наибольшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 28.

Решение.

Куб $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 кубиков, из которых у одного кубика ни одна грань не выходит на поверхность куба (центральный кубик куба); у 6 кубиков одна грань выходит на поверхность (это центральные кубики граней); у 12 кубиков — две грани (это средние кубики рёбер); у 8 кубиков — три грани (это кубики у вершин куба) и ни у одного из кубиков на поверхность не выходят более трёх граней. Площадь поверхности красного цвета будет наименьшей, если красными будут один центральный кубик, шесть центральных кубиков граней и три средних кубика рёбер, итого, наименьшая площадь красного цвета равна $1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 12$. Площадь поверхности красного цвета будет наибольшей если красными будут восемь кубиков у вершин и два средних кубика рёбер, итого, наибольшая площадь красного цвета равна $8 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 28$.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 1. Вариант 2. Из 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Он состоит из 11 красных и 16 синих кубиков.

Какая наименьшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 14.

Какая наибольшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 30.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 1. Вариант 3. Из 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Он состоит из 12 красных и 15 синих кубиков.

Какая наименьшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 16.

Какая наибольшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 32.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 1. Вариант 4. Из 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ сложили куб $3 \times 3 \times 3$. Он состоит из 13 красных и 14 синих кубиков.

Какая наименьшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 18.

Какая наибольшая площадь поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ может быть красной?

Ответ: 34.

Критерий оценивания:

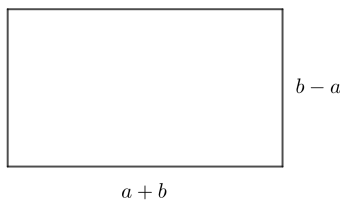
ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 2.

Вариант 1. Даны два квадрата с целыми сторонами a и b ($a < b$). Площадь прямоугольника, со сторонами, указанными на рисунке, равна 47.



Найдите a .

Ответ: 23.

Найдите b .

Ответ: 24.

Решение.

Заметим, что площадь прямоугольника равна $(a+b)(b-a) = 47$. Поскольку 47 — простое число и $a+b = b+a > b-a$, то $b+a = 47$, $b-a = 1$. Подставляя $b = a+1$ в первое равенство, получим $a+1+a = 47$, откуда $a = 23$, $b = 24$.

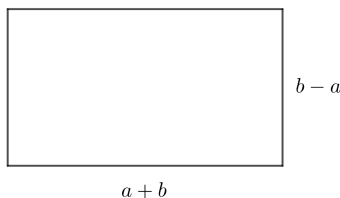
Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 2. Вариант 2. Даны два квадрата с целыми сторонами a и b ($a < b$). Площадь прямоугольника, со сторонами, указанными на рисунке, равна 53.



Найдите a .

Ответ: 26.

Найдите b .

Ответ: 27.

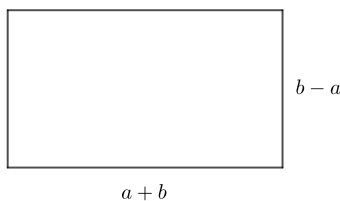
Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 2. Вариант 3. Даны два квадрата с целыми сторонами a и b ($a < b$). Площадь прямоугольника, со сторонами, указанными на рисунке, равна 67.



Найдите a .

Ответ: 33.

Найдите b .

Ответ: 34.

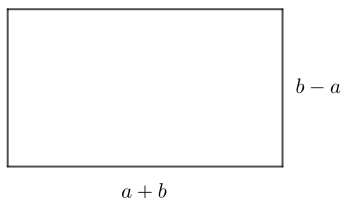
Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 2. Вариант 4. Даны два квадрата с целыми сторонами a и b ($a < b$). Площадь прямоугольника, со сторонами, указанными на рисунке, равна 73.



Найдите a .

Ответ: 36.

Найдите b .

Ответ: 37.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

ответы на оба пункта — 7 баллов

Задание 3. Вариант 1. Назовём горизонталь, вертикаль или одну из двух главных диагоналей квадрата *рядом*. В квадрате 3×3 расставили числа так, что для любого его ряда верно, что число, расположенное в его середине, вдвое меньше суммы крайних чисел этого ряда. Из квадрата стёрли некоторые числа. Восстановите их.

	7	
9		
		20

Ответ:

4 7 10

9 12 15

14 17 20.

Решение.

Заметим, что если на краях произвольного ряда стоят a и c , то в его середине $\frac{a+c}{2}$.

Если на краю ряда стоит a и в середине b , то на другом краю $2b - a$.

Пусть в центре стоит число x , тогда слева сверху $2x - 20$. Тогда слева снизу $18 - 2x + 20 = 38 - 2x$, а справа сверху $14 - 2x + 20 = 34 - 2x$.

$2x-20$	7	$34-2x$
9	x	
$38-2x$		20

Рассматривая диагональ $38 - 2x, x, 34 - 2x$, получаем $38 - 2x + 34 - 2x = 2x$, откуда $x = 12$. Остальные числа легко находим по указанным выше формулам.

4	7	10
9	12	15
14	17	20

Критерий оценивания:

восстановлено верно 4 числа — 3 балла

восстановлено верно 5 чисел — 5 баллов

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 2. Назовём горизонталь, вертикаль или одну из двух главных диагоналей квадрата *рядом*. В квадрате 3×3 расставили числа так, что для любого его ряда верно, что число, расположенное в его середине, вдвое меньше суммы крайних чисел этого ряда. Из квадрата стёрли некоторые числа. Восстановите их.

	6	
8		
		22

Ответ:

2 6 10

8 12 16

14 18 22.

Критерий оценивания:

восстановлено верно 4 числа — 3 балла

восстановлено верно 5 чисел — 5 баллов

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 3. Назовём горизонталь, вертикаль или одну из двух главных диагоналей квадрата *рядом*. В квадрате 3×3 расставили числа так, что для любого его ряда верно, что число, расположенное в его середине, вдвое меньше суммы крайних чисел этого ряда. Из квадрата стёрли некоторые числа. Восстановите их.

	7	
8		
		24

Ответ:

2 7 12

8 13 18

14 19 24.

Критерий оценивания:

восстановлено верно 4 числа — 3 балла

восстановлено верно 5 чисел — 5 баллов

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 4. Назовём горизонталь, вертикаль или одну из двух главных диагоналей квадрата *рядом*. В квадрате 3×3 расставили числа так, что для любого его ряда верно, что число, расположенное в его середине, вдвое меньше суммы крайних чисел этого ряда. Из квадрата стёрли некоторые числа. Восстановите их.

	9	
10		
		20

Ответ:

6 9 12

10 13 16

14 17 20.

Критерий оценивания:

восстановлено верно 4 числа — 3 балла

восстановлено верно 5 чисел — 5 баллов

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 1. На плоскости проведены 24 прямые, причём каждая параллельна ровно трём другим и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих прямых?

Ответ: 240**Решение.**

Каждая прямая пересекает ровно 20 других, однако, каждую точку пересечения мы посчитаем дважды, если умножим число прямых на 20. Поэтому, количество точек пересечения равно $\frac{24 \cdot 20}{2} = 240$.

Задание 4. Вариант 2. На плоскости проведены 32 прямые, причём каждая параллельна ровно трём другим и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих прямых?

Ответ: 448

Задание 4. Вариант 3. На плоскости проведены 24 прямые, причём каждая параллельна ровно двум другим и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих прямых?

Ответ: 252

Критерий оценивания:

ответ вдвое больше правильного — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 4. На плоскости проведены 30 прямых, причём каждая параллельна ровно двум другим и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих прямых?

Ответ: 405

Критерий оценивания:

ответ вдвое больше правильного — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 1. По кругу стоят 30 чередующихся стульев: чёрных и белых. На стулья сели представители двух племён: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый сидящий на белом стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке есть рыцарь. Каждый сидящий на чёрном стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке нет рыцаря. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 15

Решение.

Занумеруем стулья по порядку по часовой стрелке, обозначив за 1 белый стул. Тогда, все белые стулья имеют нечётные номера, все чёрные – чётные. Пусть на белом стуле 1 сидит лжец, тогда на стульях 2 и 3 сидят лжецы. Аналогично, рассмотрим лжеца на белом стуле 3. Тогда, на стульях 4 и 5 сидят лжецы. Но, лжец на чёрном стуле 2 сказал правду. Противоречие. Значит, на всех белых стульях сидят рыцари. Рассмотрим произвольный чёрный стул. Поскольку, на следующем за ним стуле сидит рыцарь, то на этом чёрном стуле сидит лжец. Итого, на всех чёрных стульях сидят лжецы. Значит, рыцарей ровно 15.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 2. По кругу стоят 40 чередующихся стульев: чёрных и белых. На стулья сели представители двух племён: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый сидящий на белом стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке есть рыцарь. Каждый сидящий на чёрном стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке нет рыцаря. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 20

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 3. По кругу стоят 50 чередующихся стульев: чёрных и белых. На стулья сели представители двух племён: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый сидящий на белом стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке есть рыцарь. Каждый сидящий на чёрном стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке нет рыцаря. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 25

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 4. По кругу стоят 60 чередующихся стульев: чёрных и белых. На стулья сели представители двух племён: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый сидящий на белом стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке есть рыцарь. Каждый сидящий на чёрном стуле заявил, что среди двух человек, следующих за ним по часовой стрелке нет рыцаря. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 30

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 1. В каждом столбце, в каждой строке и в каждой выделенной фигуре таблицы должно быть по одной букве *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Таблицу заполнили частично. Какая буква будет расположена в отмеченной клетке?

		D	A	
	C			
		B		E

Ответ:

- A
- ✓ B
- C
- D
- E

Решение.

Пронумеруем фигуры так, как показано на рисунке.

	1	2	3	4	5
A		2			
B			D	A	
C	1		C		4
D					
E	5		B		E

1. Рассматривая фигуру 5, понимаем, что E не может находиться в нижней строке, поэтому E находится в клетке D_2 .
2. Рассматривая строку B , понимаем, что в ней E находится в клетке B_1 . Для C доступна только клетка B_5 , тогда в клетке B_2 может находиться B .
3. В фигуре 2 есть A во второй строке, поэтому в первой строке A может быть только в клетке A_1 .

	1	2	3	4	5
A	A	2			
B	E	B	D	A	C
C	1		C		4
D			E		
E	5		B		E

4. В фигуре 5 A не может находиться в 1 и 4 столбцах, поэтому A в клетке E_2 .
5. Рассматривая фигуру 1 понимаем, что D находится в первом столбце, поэтому в фигуре 5 D может находиться только в клетке E_4 .
6. В фигуре 4 A и D не могут находиться в 4 столбце, поэтому в клетке C_4 находится B .

	1	2	3	4	5
A	A	2			
B	E	B	D	A	C
C	1		C		4
D			E		
E	5	A	B	D	E

7. Рассматривая фигуру 1 понимаем, что B не может находиться в 3 строке, поэтому B находится в выделенной клетке D_1 .

На рисунке ниже приведён пример расстановки букв, удовлетворяющей условию задачи.

	1	2	3	4	5
A	A	D	C	E	B
B	E	B	D	A	C
C	D	C	E	B	A
D	B	E	A	C	D
E	C	A	B	D	E

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 2. В каждом столбце, в каждой строке и в каждой выделенной фигуре таблицы должно быть по одной букве A, B, C, D, E. Таблицу заполнили частично. Какая буква будет расположена в отмеченной клетке?

				A
	B			
	E			C
		D		

Ответ:

- A
- B
- ✓ C
- D
- E

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 3. В каждом столбце, в каждой строке и в каждой выделенной фигуре таблицы должно быть по одной букве A, B, C, D, E. Таблицу заполнили частично. Какая буква будет расположена в отмеченной клетке?

B		D		
			E	
	C	A		

Ответ:

- A
- B
- C
- ✓ D
- E

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 4. В каждом столбце, в каждой строке и в каждой выделенной фигуре таблицы должно быть по одной букве A, B, C, D, E. Таблицу заполнили частично. Какая буква будет расположена в отмеченной клетке?

		A		
E			B	
			D	
C				

Ответ:

- A
- B
- C

- D
- ✓ E

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 1. Роботы-рекультиваторы ликвидируют последствия разлива радиоактивного вещества, снимая верхний слой почвы с участка. Вся загрязнённая почва может быть убрана одним роботом за 63 часа. Ангар с первым роботом располагается в 1 км от участка, со вторым – в 2 км и т. д. Все роботы выехали из ангара одновременно и начинали удаление почвы, как только достигали участка. Когда последний робот добрался до участка, оказалось, что загрязнённую почву только что полностью убрали. Известно, что первый робот убрал в шесть раз больше предпоследнего. Производительность и скорость передвижения всех роботов одинакова.

Сколько времени снимал почву первый робот? Ответ выразите в часах.

Ответ: 18.

Сколько времени первый робот ехал до поля? Ответ выразите в часах.

Ответ: 3.

Решение.

Ясно, что роботы прибывали к участку с равными интервалами времени. Пусть предпоследний робот работал x часов, тогда первый – $6x$, второй – $5x$ и т. д. Всего роботы отработали $6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x = 21x$ часов, что равно 63. Тогда, $x = 3$ и первый робот работал $6x = 18$ часов. Поскольку интервал прибытия роботов к участку составляет $x = 3$ часа, то очередной робот проезжает свой последний километр пути за 3 часа, следовательно, первый робот будет ехать до поля 3 часа.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 2. Роботы-рекультиваторы ликвидируют последствия разлива радиоактивного вещества, снимая верхний слой почвы с участка. Вся загрязнённая почва может быть убрана одним роботом за 60 часов. Ангар с первым роботом располагается в 1 км от участка, со вторым – в 2 км и т. д. Все роботы выехали из ангара одновременно и начинали удаление почвы, как только достигали участка. Когда последний робот добрался до участка, оказалось, что загрязнённую почву только что полностью убрали. Известно, что первый робот убрал в пять раз больше предпоследнего. Производительность и скорость передвижения всех роботов одинакова.

Сколько времени снимал почву первый робот? Ответ выразите в часах.

Ответ: 20.

Сколько времени первый робот ехал до поля? Ответ выразите в часах.

Ответ: 4.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 3. Роботы-рекультиваторы ликвидируют последствия разлива радиоактивного вещества, снимая верхний слой почвы с участка. Вся загрязнённая почва может быть убрана одним роботом за 42 часа. Ангар с первым роботом располагается в 1 км от участка, со вторым – в 2 км и т. д. Все роботы выехали из ангара одновременно и начинали удаление почвы, как только достигали участка. Когда последний робот добрался до участка, оказалось, что загрязнённую почву только что полностью убрали. Известно, что первый робот убрал в шесть раз больше предпоследнего. Производительность и скорость передвижения всех роботов одинакова.

Сколько времени снимал почву первый робот? Ответ выразите в часах.

Ответ: 12.

Сколько времени первый робот ехал до поля? Ответ выразите в часах.

Ответ: 2.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 4. Роботы-рекультиваторы ликвидируют последствия разлива радиоактивного вещества, снимая верхний слой почвы с участка. Вся загрязнённая почва может быть убрана одним роботом за 75 часов. Ангар с первым роботом располагается в 1 км от участка, со вторым – в 2 км и т. д. Все роботы выехали из ангара одновременно и начинали удаление почвы, как только достигали участка. Когда последний робот добрался до участка, оказалось, что загрязнённую почву только что полностью убрали. Известно, что первый робот убрал в пять раз больше предпоследнего. Производительность и скорость передвижения всех роботов одинакова.

Сколько времени снимал почву первый робот? Ответ выразите в часах.

Ответ: 25.

Сколько времени первый робот ехал до поля? Ответ выразите в часах.

Ответ: 5.

Критерий оценивания:

ответ на первый пункт — 3 балла

ответ на второй пункт — 3 балла

точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 1. В государстве 22 города располагаются на территориях областей так, что любые два города из одной области соединены дорогой и никакие две города из разных областей дорогой не соединены. Оказалось, что ответственность за состояние дорог можно распределить между двумя региональными министерствами следующим образом: не найдётся таких трёх городов A, B, C из одной области, чтобы дороги AB, BC и CA обслуживались бы одним министерством. Какое наибольшее число дорог может быть в этом государстве?

Ответ: 41.

Решение.

Если в какой-либо из областей хотя бы 6 городов, то дороги этой области не получится распределить между двумя министерствами. Действительно, рассмотрим произвольный город (назовём его A) из этой области. Из него выходят хотя бы 5 дорог. Значит, хотя бы три из них обслуживаются одним министерством (назовём его Первым). Пусть это дороги AB, AC и AD . Три дороги BC, CD и BD одновременно не могут обслуживаться Вторым министерством. Тогда хотя бы одна из них обслуживается Первым (пусть без ограничения общности это дорога BC). Тогда, нашлась тройка дорог AB, AC и BC , обслуживаемая одним министерством. Противоречие.

Рассмотрим такое распределение городов по областям, при котором число дорог в государстве наибольшее.

Пусть есть две области K и L , в каждой из которых менее 5 городов, причём в K городов не меньше, чем в L . Тогда перенесём один из городов области L в область K . Ясно, что число дорог увеличится. Противоречие.

Таким образом получим, что во всех областях, кроме может быть одной, по 5 городов. Ясно, что таких областей 4, а оставшиеся 2 города должны быть в одной области, и в этой области одна дорога. Учитывая, что в области из 5 городов число дорог равно $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, получим, что наибольшее число дорог в государстве равно $10 \cdot 4 + 1 = 41$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 2. В государстве 23 города располагаются на территориях областей так, что любые два города из одной области соединены дорогой и никакие две города из разных областей дорогой не соединены. Оказалось, что ответственность за состояние дорог можно распределить между двумя региональными министерствами следующим образом: не найдётся таких трёх городов A, B, C из одной области, чтобы дороги AB, BC и CA обслуживались бы одним министерством. Какое наибольшее число дорог может быть в этом государстве?

Ответ: 43.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 3. В государстве 27 городов располагаются на территориях областей так, что любые два города из одной области соединены дорогой и никакие две города из разных областей дорогой не соединены. Оказалось, что ответственность за состояние дорог можно распределить между двумя региональными министерствами следующим образом: не найдётся таких трёх городов A, B, C из одной области, чтобы дороги AB, BC и CA обслуживались бы одним министерством. Какое наибольшее число дорог может быть в этом государстве?

Ответ: 51.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 4. В государстве 28 городов располагаются на территориях областей так, что любые два города из одной области соединены дорогой и никакие две города из разных областей дорогой не соединены. Оказалось, что ответственность за состояние дорог можно распределить между двумя региональными министерствами следующим образом: не найдётся таких трёх городов A, B, C из одной области, чтобы дороги AB, BC и CA обслуживались бы одним министерством. Какое наибольшее число дорог может быть в этом государстве?

Ответ: 53.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

